Vuillemin et Lagrange : une philosophie pour les mathématiques

10.1484/J.ALMAGEST.5.141827

Jean-Jacques Szczeciniarz
Laboratoire SPHERE, CNRS
E-mail : jean-jacques.szczeciniarz@univ-paris-diderot.fr

Résumé

Nous nous proposons dans cet article de montrer à quels principes et objectifs philosophiques obéissaient les analyses du Mémoire de Lagrange sur les équations algébriques par Jules Vuillemin (1962) dans son livre. Nous rappelons que Jules Vuillemin est un philosophe français qui fut professeur au Collège de France jusqu'en 1990. Nous explicitons ici le type de relations qu'il peut exister entre le Mémoire de Lagrange dont nous reprenons l'analyse faite par Vuillemin et la philosophie de Fichte dont il exhibe également les articulations.

Introduction

** **Remarque**

Cet article comporte 5 niveaux de citations: a) Les citations du livre de Vuillemin, de Vuillemin lui-même, b) les citations du Mémoire de Lagrange commenté par Vuillemin, c) les citations de Lagrange lui-même du Mémoire commenté par Vuillemin, complémentaires de celles de Vuillemin, d) les autres citations : celle d'Abel, d'Auguste Comte, et de Klein e) les citations de Fichte, et d'un commentateur de Kant. De plus, je dois comme Vuillemin, faire apparaître les mathématiques elles-mêmes auxquelles de ce fait le lecteur pourra se reporter directement. J'ai souvent repris les termes mêmes de Jules Vuillemin qui sont aussi souvent ceux de Lagrange. Pour les équations j'ai conservé leurs notations, pour les analyses, j'ai parfois insensiblement « surcommenté » les expressions de Vuillemin.

La *Philosophie de l'Algèbre* est un ouvrage à la fortune diverse. Dans un premier temps, comme nombre des travaux publiés de Jules Vuillemin, il est apparu comme très difficile. D'un côté, les philosophes qui ne sont guère accoutumés à des ouvrages de ce type ont eu du mal à le lire. Comme c'est un travail d'une très grande richesse, il a pourtant donné lieu à bien des réflexions et citations, par exemple G. Lebrun (1972). D'un autre côté si les références directes qu'il fait aux œuvres mathématiques qu'il travaille en profondeur l'ont déqualifié, pour bien des philosophes, comme ouvrage philosophique, sa façon de procéder le déqualifie également comme ouvrage d'histoire des mathématiques. Ce jugement a cependant été battu en brèche car l'ouvrage a traversé au moins partiellement ces doubles critiques.

Ajoutons que l'ampleur des textes consultés et travaillés par l'auteur ont accentué l'incompréhension des historiens des mathématiques qui n'ont pas vu (ils relèvent à juste titre certaines erreurs historiques à discuter, des malentendus, assez rares), ne serait-ce que le sens du projet général de Jules Vuillemin. Celui-ci défend dès cette époque l'idée d'une philosophie de la connaissance et l'idée que cette dernière doit se développer au contact en profondeur des œuvres mathématiques qu'il analyse. Pour des raisons symétriques—il *philosophe* dans les mathématiques relativement difficiles—il n'a été que rarement lu par les mathématiciens, compte non tenu de ceux avec qui il a travaillé, tout particulièrement le mathématicien Pierre Samuel. Il a cependant gagné du terrain avec le temps, et à la suite de cours, de colloques, d'hommages à l'auteur, la *Philosophie de l'Algèbre* a été rééditée. 1 Il semble que dans un deuxième temps il soit devenu une référence et un outil de travail. Je voudrais, quant à moi, montrer que Vuillemin y a esquissé une possible philosophie des mathématiques et à ce titre au moins, mérite considération.

Commençons. Selon Vuillemin (1962, 4) les mathématiques pures posent un problème au philosophe en fournissant un objet essentiel à sa réflexion. Mais celle-ci n'est, pour ainsi dire, pas touchée par la nature de son objet, (d'où son caractère en apparence extérieur à celui-ci). Or il existe un rapport «plus intime, quoique moins apparent et plus incertain» entre les Mathématiques pures et la Philosophie théorique. L'histoire des mathématiques et de la

1 Voir le numéro spécial de *Philosophie Scientiae* consacré a l'ouvrage dont il est question ici.

Philosophie montre qu'un renouvellement des méthodes de celles-là a, à chaque fois, des répercussions sur celles-ci. « La méthode métaphysique de Descartes emprunte sans discontinuer à l'invention mathématique de la géométrie algébrique...le principe de continuité de Leibniz est également emprunté à l'invention du calcul infinitésimal. Il existe au moins une «affinité d'inspiration» entre les Mathématiques pures et la Philosophie théorique » (ibid.). D'où l'idée chez notre philosophe d'utiliser les analogies de la connaissance mathématique pour critiquer, réformer et définir autant qu'il se pourra la méthode propre à la Philosophie théorique. J'ajouterai que cette proposition est très générale et peut être pratiquée de manières extrêmement différentes. On montre que sur un même auteur mathématicien on peut adopter des points de vue divergents entraînant des effets philosophiques différents.

Si je complète cette première analyse des entreprises de Vuillemin, je noterai que dans son *Descartes* il se livre à des analyses du même genre concernant les arguments sur l'infini et la distorsion qu'il note entre la philosophie «officielle» de Descartes et sa correspondance, comme on peut le noter dans son acceptation des infinitésimaux dans sa correspondance (un passage à la limite) par exemple, ou même l'analyse des preuves de l'existence de Dieu. Je ne tiens pas compte à ce stade des nombreuses et riches analyses de la géométrie de Descartes, les plus importantes étant celle de Henke Bost, ou plus récemment de Sébastien Maronne (2020) ou Marco Panza (2022) car je m'efforce avant tout de promouvoir ce que j'appelle *la philosophie des mathématiques de Jules Vuillemin*.

Je vais reprendre rapidement les conceptions que ce dernier se fait des rapports entre mathématiques et philosophie, et qu'il développe dans ses analyses du devenir de la Méthode au XVIIè siècle, qui représente une étape dans l'histoire des rapports entre mathématiques et philosophie (car ils appartiennent aussi bien à l'histoire). Le lecteur sait qu'il existe une très importante littérature sur ces sujets, je développe les arguments dans la mesure où le point de vue de Vuillemin n'est pas grossièrement contredit par cette littérature. Celui-ci reprend les trois premières règles de la méthode cartésienne. Il affirme que les philosophes du XVIIIè siècle ont conscience de parfaire la méthode de Descartes. Conformément à la seconde règle, il faut achever la décomposition, et ne pas l'arrêter avant que nous ayons rencontré les idées les plus simples, celles que fournissent les sensations et qui sont comme des atomes pour l'analyse. Le sensualisme du XVIIIè siècle résulte donc d'une application naïve, philosophiquement erronée, mais méthodiquement exacte de la première et de la seconde règle de Descartes (Vuillemin 1962, 62). On voit qu'une certaine interprétation de la Méthode (comme concept) de Descartes détermine des positions philosophiques qui concernent tout autant la philosophie des mathématiques. C'est ainsi que Kant lui-même lorsqu'il place au principe des mathématiques l'intuition sensible demeure fidèle à l'inspiration du *Discours de la Méthode*. Vuillemin ajoute qu'ainsi interprétée la méthode cartésienne a entièrement perdu la signification que lui accordait son auteur à travers l'invention de la géométrie analytique. C'est pour ce dernier une réduction de l'ordre des problèmes par une méthode qui économise la pensée et «devient même inutile» (ibid. 63). Selon lui, changement de situation, les mathématiques du XVIIIè siècle, quant à elles, voient l'invention étouffer la méthode. D'où la nécessité de recourir à une méthode rigoureuse propre à unifier ces éléments hétéroclites qui sont apparus. C'est ainsi que s'introduit la figure de Lagrange.

Ce que note Vuillemin est la présence d'un double mouvement critique dans l'histoire des mathématiques qu'il parcourt. D'abord la nécessité de retrouver la méthode perdue (notons que c'est ainsi que Koyré expliquait l'apparition même de la méthode cartésienne au début du XVIIè siècle) et ensuite dans l'essence même de cette méthode un processus d'unification. Le mouvement de d'abandon même partiel de la méthode, caractérise le mouvement de l'histoire des sciences au XVIIiè siècle : nous avons le même processus à l'égard des *Principia* de Newton qui eux aussi sortent renforcés par ce mouvement.

J'en profite pour rappeler que Lagrange est un personnage scientifique essentiel, aussi bien pour Hegel (essentiellement dans la *Science de la Logique*) que pour Auguste Comte (dans le *Cours de philosophie positive*). Et Jules Vuillemin ne fait que reprendre et poursuivre leurs analyses même sans les connaître à fond. «Reprenant l'idéal méthodique qu'on avait peu à peu abandonné, purgeant les essais de ses prédécesseurs et des préjugés sensualistes qui troublaient l'ordre et des hypothèses métaphysiques qui jetaient le discrédit sur les principes, il adopte un procédé uniforme pour toutes les sciences exactes de l'Algèbre à la Mécanique. Il énonce d'abord un principe exprimé dans un algorithme, c'est-à-dire défini par certaines lois d'opérations... l'application de ces lois conduit, sans qu'on ait besoin de faire appel à aucune intuition sensible, aux divers théorèmes qui composent les sciences. Sa méthode est donc génétique en Mathématiques» (Vuillemin 1962, 64). On verra que c'est la sortie de ce «génétisme» qui caractérisera les «vraiment» nouvelles mathématiques et la «vraiment» nouvelle philosophie, dominées par cette même conception.

D'Auguste Comte à Emmanuel Kant

Vuillemin remet en vedette la méthode de Lagrange lui attribuant ce qu'il faut bien appeler dit-il un point de vue *critique*. Ce faisant il rapporte la réflexion d'Auguste Comte sur l'état des recherches de solutions des équations algébriques. Voici ce qu'il dit

> « La complication toujours croissante que doivent nécessairement présenter les formules pour résoudre les équations à mesure que le degré augmente, l'extrême embarras qu'occasionne déjà l'usage de la formule du quatrième degré, et qui la rend presque inapplicable, ont déterminé les analystes à renoncer, par un accord tacite, à poursuivre de semblables recherches, quoiqu'ils soient loin de regarder comme impossible d'obtenir jamais la résolution des équations du cinquième degré, et de plusieurs autres degrés supérieurs. Les seules questions de ce genre qui offriraient vraiment une grande importance, du moins sous le rapport logique, ce serait la résolution générale des équations algébriques d'un degré quelconque. Or plus on médite sur ce sujet, plus on est conduit à penser avec Lagrange, qu'il surpasse réellement la portée effective de notre intelligence. » (Comte 1869)

Et donc, si l'on suit notre auteur, on a là les bases, dans le pessimisme d'Auguste Comte qui s'oppose à la confiance de Descartes, pour un développement futur dans un style kantien venu de Lagrange. L'autorité de Lagrange est par ailleurs alléguée pour justifier une théorie des facultés «nos moyens de concevoir de nouveaux problèmes sont beaucoup plus puissants que nos ressources pour les résoudre, notre esprit étant plus apte à imaginer qu'à raisonner». (Vuillemin 1962, 70). (On a là encore une position proche de celle de Pascal.). Vuillemin tout en reconnaissant qu'Auguste Comte fait un constat juste, va jusqu'à dire que « aveuglé par ses préjugés il ne soupçonnait pas que l'écart entre imaginaire et raison puisse provenir d'une conception trop étroite de la raison, celle-là permettant d'étendre le champ d'application de celle-ci et lui révélant à elle-même sa propre puissance » et il méconnaît ainsi l'utilité des échecs intellectuels dont la raison parvient à percevoir la nécessité. Vuillemin cite à l'appui de ses arguments les démonstrations d'impossibilité. Abel démontre en 1824 l'impossibilité de résoudre algébriquement l'équation générale du cinquième degré. En 1830 Galois publiera trois *Mémoires sur la théorie des équations algébriques* que Fourier égarera dans ses papiers avant de mourir. Et donc selon notre philosophe, Auguste Comte est totalement passé à côté du sens profond des travaux de Lagrange inaugurant la méthode critique. Cette méthode fait la nouveauté du Mémoire de 1771. Vuillemin a bien noté la puissance des démonstrations d'impossibilité, que l'on peut effectivement voir comme une exacerbation de la méthode critique. On a souvent considéré le kantisme et la dialectique transcendantale comme le prototype de la promotion de l'impossible. Ce que ne pouvait pas voir le comtisme qui considère la critique kantienne comme une caractéristique de l'état métaphysique, dans la fameuse loi des trois états.

> « Je me propose d'examiner les différentes méthodes que l'on a trouvées jusqu'à présent pour la résolution algébrique des équations, de les réduire à des principes généraux et de faire voir *a priori* pourquoi ces méthodes réussissent pour le troisième et quatrième degré, et sont en défaut pour les degrés ultérieurs » (Vuillemin 1962, 72)

Ce sur quoi insiste notre auteur, ce qui conforte son point de vue, c'est sur le fait que l'analyse de Lagrange porte bien sur les méthodes et indirectement seulement sur les équations. De plus, ajoute-t-il, elle procède *a priori* montrant le pourquoi des réussites et des échecs et «faisant apercevoir les limites de validité qui s'inscrivent dans la possibilité même, d'une démarche algébrique» (ibid. 73). Le vocabulaire est entièrement kantien, c'est ce qui caractérisera un moment les mathématiques du XIXè siècle et ses répercussions philosophiques. Notre auteur considère que Lagrange *inaugure la méthode critique en mathématique* de manière tout à fait explicite. On peut tirer de cette position adoptée par Lagrange les raisons de son recours à la considération d'équations auxiliaires substituée à la considération directe des équations proposées. Les équations auxiliaires font voir pourquoi la méthode réussit ou échoue pour les proposées et par une méthode purement *a priori*, construit et traite directement les équations auxiliaires et en déduit systématiquement les propriétés. Les équations auxiliaires sont une fenêtre sur la résolution de l'équation proposée.

Faisons d'abord à la suite de notre auteur le bilan des entreprises de ses prédécesseurs. C'est un procédé historique très courant de récapituler en une histoire les résultats qui nous précèdent. Vuillemin cite la *Vie de Henry Brulard* de Stendhal qui a fait recette et reste encore citée par les mathématiciens d'aujourd'hui. Ce dernier fait comparaître, après avoir parlé de «l'ignoble Bezout», Gros probablement inspiré par Lagrange,

> « À la troisième ou quatrième leçon, nous passâmes aux équations du troisième degré et là Gros fut entièrement neuf. Il me semble qu'il nous transportait d'emblée à la frontière de la science et vis-à-vis de la difficulté à vaincre, ou devant le voile qu'il s'agissait de soulever. Par exemple il nous montrait que l'une après l'autre les diverses manières de résoudre les équations du troisième degré, quels avaient été les premiers essais de Cardan, peut-être ensuite les progrès et enfin la méthode présente ».

Vuillemin décrit exactement l'entreprise de Lagrange. Les prédécesseurs de Lagrange se nomment Scipio del Ferro, Tartaglia, Cardan, Ferrari, Descartes, Tschirnhaus, Euler et Bezout, de Moivre enfin pour l'équation binôme qui occupe une place à part. Vuillemin ajoute en note que Lagrange utilise également les recherches de Vandermonde et de Gauss. Waring et Vandermonde sont arrivés en 1770 à des résultats analogues à ceux de Lagrange mais sous une forme moins aboutie, sans les développements de méthode et de métaphysique. L'histoire des mathématiques a retenu des algébristes italiens la résolution des équations polynomiales du troisième degré, par l'introduction des nombres complexes et du déterminant pour exprimer les racines, en particulier les racines de nombres négatifs. Mais aucun statut véritable n'est accordé au nombre complexe et le déterminant n'est pas thématisé même s'il joue à plein. Au contraire reprenant le fond des conditions de résolution par l'introduction des équations auxiliaires Lagrange se situe en-deça du déterminant, et a franchi un pas dans la remontée de la reprise réflexive de l'équation. Insistons-y encore, c'est là que s'insère la visée critique de Vuillemin, le point de vue de Lagrange serait kantien.

Les théorèmes de Lagrange

L'équation du troisième degré, une méthode unique, la résolvante

Considérant l'équation du troisième degré, sans terme de degré deux qu'on a supprimé par un procédé classique (par exemple la transformation de Tschirnhaus) Vuillemin distingue quatre opérations qui doivent résoudre la proposée.

1-La transformation pour réduire la proposée.

Cette transformation utilise une équation auxiliaire à même de transformer la proposée en une équation qui se résolve comme une équation du second degré, une nouvelle variable pouvant figurer seulement au carré et au degré un. On prend

$$\mathrm{x} = \mathrm{y} - \frac{n}{3y}$$

2-On obtient donc l'équation auxiliaire cherchée ou *réduite* en appliquant la transformation à la proposée.

$$y^6 \ + \ py^3 - \frac{n^3}{27} = 0$$

3-En prenant

$$r = y^3, r^2 + pr - \frac{n^3}{27} = 0$$

On peut la résoudre comme une équation du second degré qu'elle est.

Je dois faire le commentaire suivant, au-delà de Vuillemin. Dans la constitution de la réduite nous devons nous retrouver dans une situation familière, celle du second degré, la progression a consisté dans le discernement au sein du sixième degré du second degré.

Au fond ce qui va rendre intuitivement soluble ces équations c'est leur accession à des degrés abaissés.

4-Les solutions de la réduite du sixième degré ne sont que les racines cubiques de ces deux solutions de la réduite abaissée. D'où une quatrième opération, former l'équation associée à cette dernière équation et calculer les racines troisièmes de l'unité.

Profitons de cette situation pour réfléchir rapidement sur les racines de l'unité. On sait qu'il existe un nombre complexe dont l'élévation à la puissance 3 donne 1. Le 1 concentre la puissance du nombre complexe. Hegel exprime une profonde admiration pour ce théorème qu'il analyse dans le chapitre terminal de la *Science de la Logique*, comme une sorte d'expression de l'absolu, on est dans la dernière section intitulée « L'idée »... Hegel explique quelles sont les raisons de l'intervention de la méthode synthétique et indique la solution de Gauss de l'équation $X^{m-1} - 1 = 0$, à l'aide d'»un des développements les plus importants qui aient été réalisés de nos jours dans l'analyse» (Hegel 1969).

Les racines, pour le cas cubique, sont

$$\epsilon = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}, \quad \epsilon^2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}, \quad \epsilon^3 = 1.$$

Et bien entendu comme elles donnent des expressions du 1 elles donnent des expressions de la racine du polynôme. Le produit des deux racines

$$r_1 = \frac{1}{2}\left(-p + \sqrt{p^2 - \frac{4n^2}{27}}\right). \qquad r_1 = \frac{1}{2}\left(-p - \sqrt{p^2 - \frac{4n^2}{27}}\right)$$

est égal au cube du facteur $\frac{-n}{3}$ dans l'expression de l'équation auxiliaire et est le produit des racines du trinôme du second degré. Dans l'expression finale des racines de la proposée figurera une relation linéaire entre ces racines x_i et les racines cubiques des deux solutions de la réduite abaissée r_1 et r_2. J'emploie ici les termes dont use Vuillemin à la suite de Lagrange.

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{r_1} + \sqrt[3]{r_2} \\ x_2 = \epsilon\sqrt[3]{r_1} + \epsilon^2\sqrt[3]{r_2} \\ x_3 = \epsilon^2\sqrt[3]{r_1} + \epsilon\sqrt[3]{r_2} \end{cases}$$

Toujours selon la même ligne de commentaire Vuillemin rappelle donc que pour écrire les équations en e il faut connaître la théorie des racines de l'unité et donc avoir accepté l'introduction des quantités imaginaires en Algèbre, envisagées et écartées par Chuquet, par Cardan, reçues par Bombelli, Albert Girard et Descartes. Vuillemin cite Boutroux (1914, 146).

Dans les *Leçons élémentaires* Lagrange expose comme une théorie importante, la théorie des racines de l'unité. Vuillemin explique aussi comment la relation rationnelle se change dans les relations linéaires qui fournissent les solutions. Le fait que les relations obtenues soient linéaires est la marque de la fin du processus, comme fin de la résolution (voir plus bas). (On regarde le produit des racines et les relations entre les racines de l'unité). Rappelons que l'on appelle racine nième de l'unité tout complexe z tel que $z^n = 1$. Notre philosophe continue son travail sur la réduite. Celle-ci est du sixième degré. Elle admet six racines distinctes et la mise sous la forme d'un trinôme du second degré et les l'expression des racines de l'unité permettent de distribuer ces racines en deux classes :

$$y_1 = \sqrt[3]{r_1} \qquad y_2 = \epsilon\sqrt[3]{r_1} \qquad y_3 = \epsilon^2\sqrt[3]{r_1}$$

et

$$y_4 = \sqrt[3]{r_2} \qquad y_5 = \epsilon\sqrt[3]{r_2} \qquad y_6 = \epsilon^2\sqrt[3]{r_2}$$

Mais la transformation proposée par Lagrange ne donne que trois racines distinctes de la proposée. Le produit des 2 racines $r_1 \cdot r_2$ de l'expression binômiale correspond à cette transformation

$$\sqrt[3]{r_1} = \sqrt{\frac{-n^3}{27}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{r_2}} = \frac{1}{3}\frac{-n}{\sqrt[3]{r_2}}$$

Tout ce travail sur la réduite montre que le problème est en train de changer de nature, on travaille sur les conditions de possibilité d'existence des racines. Nous nous retrouvons alors au niveau des racines possibles et c'est ce travail sur ces possibles qui nous rapproche de la solution.

Vuillemin explique comment, à la suite de Lagrange, l'intervention des racines de l'unité permet de passer aux relations linéaires qui donnent la solution. Reprenons les six valeurs de y dans la première transformation :

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - \dfrac{n}{3y_1} = \sqrt[3]{r_1} + \sqrt[3]{r_2} \\ x_2 = y_2 - \dfrac{n}{3y_2} = \epsilon\sqrt[3]{r_1} + \epsilon^2\sqrt[3]{r_2} \\ x_3 = y_3 - \dfrac{n}{3y_3} = \epsilon^2\sqrt[3]{r_1} + \epsilon\sqrt[3]{r_2} \end{cases}$$

On constate que

$$x_4 = y_4 - \frac{n}{3y_3} = x_1 \,,\; x_5 = y_5 - \frac{n}{3y_3} = x_2 \,,\; x_6 = y_6 - \frac{n}{3y_6} = x_3$$

Il est possible de nous contenter des trois racines.

Le résultat important est que nous disposons d'une méthode unique à laquelle nous pouvons réduire à la suite de Lagrange les divers procédés que ses prédécesseurs avaient utilisés pour résoudre l'équation de degré trois. Mais il faut, et c'est ce point que notre philosophe a raison de souligner, de plus expliquer les raisons de ce succès. Là on aura affaire à une véritable synthèse.

La méthode de Lagrange constituée

Notre philosophe note que Descartes avait saisi la nature de la réduite pour le quatrième degré et il exprime ainsi la dépendance algébrique entre les racines de la proposée et celles de l'équation auxiliaire. Ce qui reste à faire est plus important, non plus exprimer x en fonction de y mais donner l'expression de y en fonction de x. La réduite est analysée pour elle-même et comme elle permet de résoudre la proposée, elle donne en présentant les solutions de la réduite en fonction des solutions de la proposée, la solution de l'équation. C'est pourquoi Lagrange et les algébristes ont appelé *résolvante* une telle équation (Escofier 1997, 164). 2 La résolvante de Lagrange est définie de la manière ci-dessus. Elle peut résulter du théorème 90 de Hilbert (ibid. 163). Soit K un corps $L \subset C$ $G = Gal(L/K$ σ un K- automorphisme de L, générateur de G pour tout x de L, on a l'équivalence : N(x) = 1 ⇔ ∃y ≠ 0 tel que $x = \frac{y}{\sigma(y)}$,

$$\begin{cases} x_1 + \epsilon x_2 + \epsilon^2 x_3 = \sqrt[3]{r_1}(1 + \epsilon + \epsilon^2) + 3\sqrt[3]{r_2} = 3\sqrt[3]{r_2} \\ x_1 + \epsilon^2 x_2 + \epsilon x_3 = 3\sqrt[3]{r_1} + \sqrt[3]{r_2}(1 + \epsilon + \epsilon^2) = 3\sqrt[3]{r_1} \end{cases}$$

Lagrange choisit l'expression

$$y = \frac{x_1 + \epsilon x_2 + \epsilon^2 x_3}{3}$$

On appelle aujourd'hui *résolvante de Lagrange* les expressions linéaires des racines de la réduite en fonction des racines de la proposée et des racines de l'unité de l'équation binôme associée. C'est cette expression qui nous place maintenant à un niveau supérieur, celui des conditions de possibilité de recherche des solutions de l'équation. Le concept de résolvante mérite commentaire, d'autant qu'il est utilisé par exemple pour la résolution d'équations différentielles. La résolvante signifie qui résout, elle porte le poids de la mise en place de la solution. Nous allons voir comment elle fonctionne. Mais l'intérêt philosophique tient ici à la constitution d'une sorte de d'agent résolveur, en tant que tel. La construction des moyens de la solution fait maintenant partie de la théorie des équations. Vuillemin a été particulièrement sensible à ce développement de la théorie. C'est pourquoi je vais en commenter certains aspects par la suite, en suivant l'analyse par notre philosophe des aspects les plus techniques, pour un lecteur philosophe, des démonstrations de Lagrange.

Une excellente analyse de la résolvante de Lagrange par différence avec celle de Galois se trouve dans le livre de Edwards (1984).

Suivons donc Vuillemin dans son analyse de la résolvante. La réduite ne dépend que des coefficients de la proposée, p et n et non pas des racines x_1, x_2, x_3, les coefficients de la proposée

---

2

sont, à leur tour, fonctions des racines. Ces fonctions sont symétriques, on peut dans l'expression de y échanger à volonté les quantités x_1, x_2, x_3, entre elles. Un principe essentiel qui est à la base de toutes ces considérations est le théorème aussi appelé *théorème des fonctions symétriques*. Vuillemin le fait remonter à Albert Girard. Descartes ne l'a pas reconnu. Newton en a fait une démonstration complète. 3 Voici la présentation que celui-ci en fait.

Le théorème des fonctions symétriques

Considérons le produit de n facteurs. $(x+a)(x+b)\cdots(x+l)$ $a,b,\cdots,l$ toutes différentes. On prend un terme dans chaque facteur, on fait le produit de ces termes, on répète l'opération de toutes les façons possibles et on effectue la somme de tous les produits obtenus. Soit

1° x dans les n facteurs on obtient le terme en x^n

2° x dans les (n-1) facteurs et la seconde lettre dans le facteur restant

On obtient les termes $ax^{n-1}, bx^{n-1}, \cdots lx^{n-1}$, dont la somme est : $(a+b+\cdots+l)x^{n-1}$

3° Pour avoir un terme de degré $n-p$ par rapport à x, on prend x dans $n-p$ facteurs et la seconde lettre dans les p autres facteurs. Le coefficient de ce terme en $xn-p$ est égal au produit de p des termes des lettres $a,b,\cdots,l$. L'ensemble de ces p lettres constitue une combinaison des lettres $a,b,\cdots,l$, p à p. On formera toutes les combinaisons p à p des lettres $a,b,\cdots,l$, on fera le produit des lettres de chaque combinaison, on ajoutera les produits obtenus et on obtiendra les coefficients S_p du terme en x^{n-p}. Et en particulier pour $p = n$ $S_n = a,b,\cdots,l$. Par suite,

$$(x+a)(x+b)\cdots(x+l) = x^n+S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}+\cdots+S_px^{n-p}+\cdots+S_n.$$

Passons au cas où les lettres $a,b,\cdots,l$ sont soustraites de x au lieu de lui être ajoutées. Le coefficient de x^{n-1} sera négatif comme somme de facteurs négatifs, le coefficient de x^{n-2} puisqu'on multiplie par des sommes de produits de deux termes négatifs.

On a bien la formule finale

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n) = x^n-\sigma_1x^{n-1}+\sigma_2x^{n-2}+\cdots+(-1)^n\sigma_n$$

avec

$$\begin{cases} \sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots x_n \text{ (\textit{somme des produits} 1 à 1 \textit{des} } n \text{ \textit{lettres} } x_i) \\ \sigma_2 = x_1x_2+x_1x_3+\cdots x_{n-1}x_n \text{ (\textit{somme des produits} 2 à 2 \textit{de ces} } n \text{ \textit{lettres})} \\ \vdots\ \sigma_n = x_1\, x_2 \cdots x_n \text{ (\textit{produits} } n \text{ à \textit{des} } n \text{ \textit{lettres})} \end{cases}$$

3 Cf. note 10 vs. Edwards (1984).

Les σ_i sont appelées *polynômes symétriques élémentaires*. Leur histoire est rappelée précisément dans le livre de Harold L. Edwards (1984). L'importance de ces fonctions polynômes vient selon Lagrange de ce que "toute fonction rationnelle et invariables des quantités $x1, x2, x3\cdots$ pourra toujours être déterminée en fonction de ces coefficients, $\sigma_1\sigma_2, \cdots, \sigma_n$. C'est là un des principes les plus féconds de la théorie des équations " (Lagrange 1797, 295-327).

Fin de cette première présentation de la résolvante

L'expression que Lagrange a choisie fait apparaître deux propriétés importantes. La quantité y possède un degré qui est liée à sa fonction. On peut échanger les quantités x_1, x_2, x_3 entre elles et Vuillemin cite Lagrange : "par conséquent, la quantité y devra avoir autant de valeurs différentes que l'on en pourra former par toutes les permutations possibles dont les trois racines x_1, x_2, x_3 sont susceptibles ; or on sait par la théorie des combinaisons que le nombre de permutations, c'est-à-dire des arrangements différents de trois choses, est 3. 2.1; donc la réduite en y doit être aussi du degré 3. 2. 1, c'est-à-dire du sixième." Comme notre philosophe le commente, "par l'intermédiaire des permutations des racines de la proposée qui figurent dans l'expression de la résolvante, cette dernière expression détermine donc le degré de la réduite. Comme on le constate, les permutations des racines (qui figurent dans l'expression de la résolvante) constitue une sorte d'invariant qui fait partie du concept de la résolvante. Cette dernière permet de substituer à la considération des racines celle de leur permutation possible, sachant que l'on a affaire au départ aux trois racines de la proposée." Et ce changement de terrain est rendu possible par la théorie des fonctions symétriques. La résolvante ouvre le terrain à une observation de toutes les racines possibles. C'est encore une occasion pour moi de souligner *combien la caractérisation de la méthode de Lagrange est celle d'une méthode critique.* On le voit encore dans la suite immédiate.

L'expression de la résolvante fournit la raison pour laquelle on peut abaisser au second degré la réduite qui est du sixième. Dans l'équation de la réduite ne figurent que les puissances troisièmes et sixièmes de y. Si nous effectuons dans l'expression de la résolvante toutes les permutations possibles des x_i nous obtenons six valeurs de y qui se répartissent en deux classes suivant le nombre de transpositions, ou échanges de 2 éléments entre eux. On a la classe des permutations paires

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{3}(x_1 + \epsilon x_2 + \epsilon^2 x_3). \quad y_2 = \frac{1}{3}\ (x_2 + \epsilon x_3 + \epsilon^2 x_1) \\ y_3 = \frac{1}{3}\ (x_3 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2)\ . \end{cases}$$

et celle des permutations impaires

$$\begin{cases} y_4 = \frac{1}{3}(x_1 + \epsilon x_3 + \epsilon^2 x_2). \quad y_5 = \frac{1}{3}\ (x_3 + \epsilon x_2 + \epsilon^2 x_1) \\ y_3 = \frac{1}{3}\ (x_2 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_3)\ . \end{cases}$$

On vérifie facilement[4] que

$$y_1 = \epsilon y_2 = \epsilon^2 y_3 \qquad y_4 = \epsilon y_5 = \epsilon^2 y_6$$

Multiplier les résolvantes par une racine primitive de l'unité est équivalent à une permutation simultanée des x_i, ou on prend le cube de ces quantités

$$y_1^3 = y_2^3 = y_3^3 \qquad y_4^3 = y_5^3 = y_6^3 .$$

D'où le passage á l'équation quadratique.

Comme y insiste notre auteur, en introduisant la méthode de la résolvante Lagrange substitue à un procédé *a posteriori* et aveugle un procédé rationnel et *a priori*. Telle est la première partie de l'analyse par Vuillemin du mémoire de Lagrange. On a vu ce qui l'intéresse dans cette analyse : un procédé rationnel et *a priori* de résolution de l'équation du troisième degré. Nous sommes ici à mi-chemin d'une constitution du transcendantal : notre philosophe a montré comment la résolvante telle que conçue par Lagrange fournit un concept *a priori* de la résolution comme structure donnée pour les racines possibles, mais elle ne donne pas encore la clé de cette résolution. La réduite n'est plus supposée connue, il faut donc la construire à partir d'une fonction analogue à la résolvante, soit une fonction linéaire des racines à coefficients indéterminés, que Vuillemin présente dans les notations suivantes

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3.$$

Dans les coefficients de la proposée les racines figurent symétriquement. Cette propriété doit être présente dans les coefficients de la réduite, qui doit donc admettre comme racines les six expressions qui résultent des permutations qu'on pourra opérer sur la racine de la réduite entre x_1, x_2 et x_3. On aura donc les six expression suivantes:

$$\begin{cases} Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 & Ax_1 + Bx_3 + Cx_2 & Ax_2 + Bx_1 + Cx_3 \\ Ax_2 + Bx_3 + Cx_1 & Ax_3 + Bx_1 + Cx_2 & Ax_3 + Bx_2 + Cx_1 \end{cases}$$

Pour que la réduite n'admette que des puissances multiples de 3, il faut que y étant une de ses racines, ϵy et $\epsilon^2 y$ soient aussi une racine. Si on pose $y = Ax + Bx + Cx$ il faut que la quantité $\epsilon Ax_1 + \epsilon Bx_2 + \epsilon Cx_3$ soit également une racine et soit donc égale à l'une des quantités données ci-dessus.

Par un raisonnement un peu imprécis on trouve, en identifiant $\epsilon Ax_1 + \epsilon Bx_2 + \epsilon Cx_3$ à la quatrième des quantités ci-dessus

$$\epsilon A = C \qquad \epsilon B = A \qquad \epsilon C = B$$

d'où

$$C = \epsilon A, \qquad B = \epsilon^2 A \qquad \epsilon^2 A = A$$

4 Je renvoie pour tout cela, le lecteur à des théorèmes élémentaires sur les permutations qu' il trouvera dans tout manuel. Moins connu, par exemple, Netto (1882).

et en posant $A = 1$ on retrouve donc la résolvante (au facteur 1/3 près).

$$t = x_1 + \epsilon x_2 + \epsilon^2 x_3.$$

En reconstruisant les démonstrations de Lagrange Vuillemin constate que le procédé *a priori* reproduit exactement les mêmes étapes mais à rebours que le procédé *a posteriori*. Je donne un descriptif de celles-ci dans le cas traité par Lagrange, il sera repris dans le cas général dans la seconde partie du Mémoire. On remplace dans l'expression de la résolvante ϵ par ses différentes valeurs possibles.

$$\begin{cases} t_0 = x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ t_1 = x_1 + \epsilon x_2 + \epsilon^2 x_3 \\ t_2 = x_1 + \epsilon^2 x_2 + \epsilon x_3 \end{cases}$$

La première équation provient de la structure générale de l'équation générale. On opère dans les t_i toutes les permutations possibles des x_i : t_0 ne bouge pas (= 0), et les t_1 et t_2 prennent 12 valeurs sous l'effet de ces permutations, qui se réduisent à 6 (à chaque permutation paire en t_1 correspond une permutation identique impaire en t_2 et réciproquement). En prenant les cubes de ces quantités, qui seuls seront dans la réduite on les a réduits à deux valeurs analogues aux deux valeurs r_1 et r_2 des racines de la réduite.

$$\theta_1 = t_1^3, \theta_2 = t_2^3, (\theta_0 = t_0^3 = 0).$$

Le calcul des quantités θ_1 et θ_2 en fonction des racines de l'unité et des coefficients de la proposée est un calcul qui n'utilise essentiellement que les propriétés des fonctions symétriques.
Si ξ_0, ξ_2, ξ_3 sont des expressions constructibles à partir de ces coefficients, une combinaison rationnelle de ces quantités n'y figurera que sous une racine carrée. On écrit :

$$\theta_1 = \xi_0 + \epsilon\xi_1 + \epsilon^2\xi_2, \theta_2 = \xi_0 + \epsilon^2\xi_1 + \epsilon\xi_2,$$

qui sont racines de l'équation du second degré : Tapez une équation ici.

$$\theta_2 + 27p\theta - 27n^3 = 0$$

équivalente à la réduite, en faisant et donne *a priori* la réduite sous la forme suivante

$$t_3 + 27pt^3 - 27n^3 = 0.$$

Comme les t_0,t_1,t_2 sont respectivement racines cubiques de $\theta_0,\theta_1,\theta_2$ et que par les expressions de la résolvante, les x_i sont elles-mêmes des expressions linéaires des t_i et des racines de l'unité, on peut résoudre algébriquement directement l'équation du troisème degré. On fait la somme des t_i et par les propriétés des racines de l'unité on détermine x_1 et on obtient respectivement x_1 et x_2 en faisant cette même somme mais en multipliant dans le premier cas aussi t_1 par ϵ^2, t_2 par ϵ, dans le deuxième t_1 par ϵ, t_2 par ϵ^2, Et ainsi

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\theta_1} + \sqrt[3]{\theta_2}\right) \\ x_2 = \frac{1}{3}\left(\epsilon^2 \sqrt[3]{\theta_1} + \epsilon \sqrt[3]{\theta_2}\right) \\ x_3 = \frac{1}{3}\left(\epsilon \sqrt[3]{\theta_1} + \epsilon^{2} \sqrt[3]{\theta_2}\right) \end{cases}$$

Le plus important est le commentaire que Vuillemin et Lagrange en font. Ce procédé, dit le philosophe, s'applique particulièrement à la solution de Cardan, mais la marche raisonnée qui en assure le succès s'applique aux autres procédés que l'on applique pour résoudre algébriquement l'équation du troisième degré, que ce soit la méthode d'élimination de Tschirnhaus, des méthodes de Bezout, ou d'Euler, : « [ces méthodes] reviennent toutes au même pour le fond, puisqu'elles consistent à trouver des réduites dont les racines soient représentées en général par $x_1+\epsilon x_2+\epsilon^2 x_3$ ou $(x_1+\epsilon x_2+\epsilon^2 x_3)^2$ ou bien ce qui est la même chose, par des quantités proportionnelles à celles-ci. Dans le cas où la racine de la réduite est $x_1+\epsilon x_2+\epsilon^2 x_3$ cette réduite est du sixième degré, résoluble à la manière du second, parce qu'elle ne renferme que la troisième et la sixième puissance de l'inconnue. Nous en avons donné la raison⋯. Dans le cas où la racine de la réduite est $(x_1+\epsilon x_2+\epsilon^2 x_3)^2$, cette réduite ne peut être que du second degré, ce qui suit nécessairement du cas précédent » (Lagrange 1797). Et pour synthétiser sa position, voici ce qu'il dit de manière conclusive.

> « Non seulement nous avons rapproché ces méthodes les unes des autres, et montré leur liaison et leur dépendance mutuelle: nous avons encore, ce qui était le point principal, donné la raison a priori [mes it] pourquoi elles conduisent les unes à des réduites du troisième degré, les autres à des réduites du sixième, mais qui peuvent s'abaisser au troisième, cela vient en général de ce que les racines de ces réduites sont des fonctions des quantités x_1,x_2,x_3,x_4 telles qu'en faisant toutes les permutations possibles entre ces quatre quantités, elles ne peuvent recevoir que trois valeurs différentes comme la fonction $x_1x_2 + x_3x_4$ ou six valeurs, mais deux à deux égales ou de signes contraires, comme la fonction $x_1+ x_2- x_3- x_4$ ou bien six valeurs telles, qu'en les partageant en trois couples et prenant la somme ou le produit des valeurs de chaque couple, ces trois sommes ou ces trois produits soient toujours les mêmes, quelque permutation qu'on fasse entre les quantités x_1,x_2,x_3,x_4.» (Lagrange 1867-1912)

Le procédé direct et *a priori*

Ce procédé consiste à utiliser les propriétés des résolvantes et des racines primitives de l'unité pour déterminer les réduites et donc les solutions de la proposée. Si on considère l'équation générale algébrique de degré m il faut posséder les fonctions symétriques fondamentales correspondant aux coefficients de la proposée.

On a

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \cdots + T = 0$$

« Cette équation admet m racines et par les propriétés des fonctions symétriques

$$\begin{cases} A = \sigma_1 = \Sigma x_1 \\ B = \sigma_2 = \Sigma x_i x_j \\ C = \sigma_3 = \Sigma x_l x_j x_k \\ \ldots \end{cases}$$

Ces fonctions sont invariantes par permutation simultanée des racines (ce que Lagrange symbolise en plaçant entre parenthèses l'ensemble pour marquer leur regroupement des variables), et il note que toutes ces fonctions sont semblables, elles varient en même temps quand on y fait les mêmes permutations entre les quantités dont elles sont composées : leur groupe de substitutions est identique ».

J'ai déjà souligné à la suite de Vuillemin l'importance des fonctions symétriques. Je voudrais ajouter que cette importance tient au fait qu'elle donne une substance à l'essence ou l'idéalité du contrôle sur les racines. Celles-ci deviennent ainsi un être de second rang. La substance de l'analyse philosophique qui peut ainsi être développée est la suivante. La résolvante et les permutations des fonctions symétriques qu'elles portent, en faisant primer le concept des relations qu'elles entretiennent font des polynômes une sorte de schème porteur de concrétisation possible. Lorsqu'on passera à la théorie telle que Galois la présentera, (dont je ne traite pas ici) on pourra voir encore plus nettement que l'on a affaire à un jeu de structures conceptuelles dont l'essence consiste à pousser une dynamique de résolution plus qu'une résolution.

Cinq opérations pour la méthode directe de résolution de l'équation du troisième degré

a) Soit t l'inconnue de la réduite. On exprime *a priori* la racine de cette équation en fonction des racines de la proposée. Cette expression est une fonction linéaire de ces m racines, soit

$$t = x_1 + \epsilon x_2 + \epsilon^2 x_3 + \epsilon^3 x_4 + \cdots \epsilon^{m-} x_m,$$

où ϵ, ϵ^2,ϵ^4, sont les racines m –ièmes de l'unité soit les racines de l'équation $y^m - 1 = 0$.

b) On examine l'équation binôme qui fournit les racines de l'unité. Vuillemin explique que c'est nécessaire car la forme de la réduite en dépend. Si m est premier toutes les puissances de ϵ jusqu'à ϵ^m sont différentes, si $\epsilon \neq 1$. Si m est un produit de facteurs pq premiers et distincts, α racine de $y^p - 1=0$ et β de y^q–1=0 toutes deux différentes deun, la racine $\alpha\beta$ de l'équation $ym - 1 = 0$ a la même propriété que la racine ϵ quand m est premier. Toutes les racines de cette équation peuvent être représentées par les puissances successives de $\alpha\beta$. Quand m n'est pas premier il suffit de résoudre des équations semblables dont les exposants sont des puissances de nombres premiers qui composent m. Notre philosophe reprend à cette occasion le cas du polynôme cyclotomique. Il en rappelle le résultat donné par Lagrange. Si l'on prend

$$1 + \epsilon + \epsilon^2 + \cdots + \epsilon^{m-1} = 0$$

ou $1 + \Sigma\alpha = 0$ jusqu'à

$$1 + \epsilon^{m-1} + \epsilon^{2(m-1)} + \cdots \epsilon^{(m-1)^2} = 0$$

ou $1 + \Sigma^{m-1} = 0$. Pour $\epsilon^m = 1$, $1 + \Sigma\alpha^{m-1} = m$.

c) Opérations sur la résolvante

On multiplie la résolvante donnée ci-dessus par ϵ, on obtient puisque $\epsilon m = 1$ - on prend m premier -

$$\epsilon t = x_m + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \epsilon^3 x_3 + \cdots + \epsilon^{m-1} x_{m-1}$$

$$\epsilon^2 t = x_{m-1} + \epsilon x_m + \epsilon^2 x_1 + \epsilon^3 x_2 + \cdots + \epsilon^{m-1} x_{m-2}.$$

Ces multiplications sont équivalentes à une permutation circulaire des racines dans l'expression de t. Comme le remarque notre philosophe, toutes ces opérations sont en réalité des opérations de groupe. La trace d'opération de groupe est visible ici du fait que nous ayons affaire si souvent à des permutations que le concept de groupe n'aura qu'à traduire (composition des permutations et prise de l'inverse). *Mais le point de vue de Lagrange rend possible une conception qui se situe sur un terrain différent de celui de la théorie des groupes, il nous engage plutôt à considérer les symétries du polynôme, ce qui induit une vision plus large et plus «originaire» de la théorie des équations*.

Poursuivons sur la résolvante.

d) La réduite, dont la résolvante donne la racine, ne contient pas directement les racines de la proposée, mais elle est fonction de ses coefficients. Elle est invariable à ce titre pour les substitutions qui changent simultanément x_1 en x_2 x_2 en x_3 etc. Elle ne demeure invariable que si elle ne contient que des puissances de t dont les exposants soient des multiples de m.

On prend $\theta = t^m$ la plus petite de ces fonctions. Comme on a $1 + \Sigma\alpha^{m-1} = 0$. Le degré de l'équation en t ne monte qu'au m-ié, si nous avions appliqué le procès d'élimination au système des fonctions symétriques, nous aurions obtenu une équation finale d'un degré plus haut qu'elle ne devrait avoir (Vuillemin 1962, 91). l est remarquable, comme il est noté par Lagrange et par notre philosophe qu'il faut élever et qu'il est possible d'élever l'équation à un degré qu'il sera ensuite possible d'abaisser : « c'est parce que la forme des racines est liée aux propriétés des racines de l'unité que la réduite peut donc être abaissée. » (ibid.)

On doit remarquer que l'exploitation des propriétés de $\mathbb{C}$ et des racines de l'unité est liée à l'algébricité de $\mathbb{C}$ et plus indirectement au théorème fondamental de l'algèbre. Il reste à examiner l'équation en θ. Ses racines ne sont que les différentes valeurs de :

$$\theta = (x_1 + \epsilon x_2 + \epsilon^2 x_3 + \cdots + \epsilon^{m-1} x^m)^m.$$

qui résultent des permutations des $m-1$ racines $x_1, x_2, \cdots, x_m$ entre elles, la quantité $x1$ restant fixe. On aura les deux équations suivantes, en t et en θ.

$$\theta = t^m; (P) \quad \theta^{m-1} + P_1\theta^{m-2} + P_2\theta^{m-3} + \cdots P_{m-2}\theta + P_{m-1} = 0.$$

Les coefficients $P_1, P_2, \cdots, P_{m-1}$ dépendent pour chacun d'eux d'une équation de degré $(m-2)!$. On s'aperçoit qu'ils ne dépendent ensemble que d'une équation de degré $(m-2)!$.

Je ne sais si Vuillemin avait le projet de le montrer, mais là encore son étude des calculs attenant à la résolvante présente une signification philosophique. Ils ne sont pas seulement une restitution historique intéressante des mathématiques de Lagrange. Le travail sur les permutations des racines (de la proposée) se fixe cet objectif de mettre en évidence et d'autonomiser les fonctions des racines de la proposée. Il s'agit d'une nouvelle dépendance symétrique de celles que nous avons vues : les coefficients de l'équation en θ dépendent des racines de la proposée. Il faut exprimer les P_i en fonction des x_i. Il lui faut mettre en évidence les outils du calcul qui prennent alors sens en eux-mêmes.

e) Quand on élève la résolvante à la ième puissance, on peut rabaisser les exposants de ϵ au-dessous de m, et mettre le résultat sous la forme

$$\theta = \xi_0 + \epsilon\xi_1 + \epsilon^2\xi_2 + \cdots + \epsilon^{m-1}\xi_m.$$

les ξi étant des polynômes de degré m en x_i, indépendants des racines de l'unité et invariables pour les permutations simultanées des racines (Vuillemin 1962, 92). Quand on substitue à ϵ chacune des racines imaginaires de l'équation binôme adjointe, cette formule donne les $(m-1)$ valeurs de θ: $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{m-1}$. Si on fait $\epsilon = 1$, l'expression a pour valeur la m-iè puissance des racines de l'unité, puisque $\theta_0 = (x_1 + x_2 +, \cdots, + x_m)^m$. D'où les opérations suivantes :

$$\begin{cases} A^m = \xi_0 + \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{m-1} \\ \theta_1 = \xi_0 + \epsilon\xi_1 + \epsilon^2 xi_2 + \cdots + \epsilon^{n-1}\xi_{m-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots + \cdots\cdots\cdots \\ \theta_{n-1} = \xi_0 + \epsilon^{m-1}\xi_1 + \epsilon^{2(m-1)} xi_2 + \cdots + \epsilon^{(m-1)^2}\xi_{m-1}. \end{cases}$$

On somme ces équations et on désigne par S_1 la somme des racines de l'équation en θ dans l'équation (P). On obtient

$$A^m + S_1 = m\xi_0$$
$$S_1 = m\xi_0^\mu - A^{\mu m}$$

et, si S_μ désigne la somme des μ-ièmes puissances des racines de (P) on aura

$$A^{\mu m} + S_\mu = m\xi_0^\mu$$
$$S_\mu = m\xi_0^\mu - A^{\mu m}.$$

On remonte ensuite : on calcule les sommes $S_2,\cdots,S_{m-1}$ et on en déduit les valeurs des P_i qui sont exprimés en fonction des x_i. Si, ajoute Vuillemin, dans l'expression de l'un des P_i, par exemple P_1 on échange toutes les racines, on ne trouvera que $(m-1)!$ valeurs distinctes ; on formera alors l'équation en P_1 et on exprimera les autres P_i en fonction rationnelle de P_1.

La dernière étape conclusive qui donne le résultat est alors la suivante. On suppose connues les θ_j, on obtient les racines de la proposée. On remplace en t à la place de ϵ les diverses racines de l'unité.

$$\begin{cases} t_0 = x_1 + x_2 + \xi_3 + \cdots + x_m = \sqrt[m]{\theta_0} = \Lambda \\ t_1 = x1 + \epsilon(x_2 + \epsilon^2 x_3 + \cdots + \epsilon^{m-1} x_m = \sqrt[m]{\theta_1} \\ t_2 = x_1 + \epsilon^2 x_2 + \epsilon^4 x_3 + \cdots + \epsilon^{2(m-1)} x_m = \sqrt[m]{\theta_2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots + \cdots \dots\dots\dots . \end{cases}$$

En sommant ces équations et tenant compte de l'annulation des sommes $(x_2 + \epsilon x_2 + \epsilon^2 x_2 + \cdots + \epsilon^{(m-1)} x_2 = 0)$ on obtient le résultat :

$$x_1 = \frac{1}{m} (\sqrt[m]{\theta_0} + \sqrt[m]{\theta_1} + \sqrt[m]{\theta_2} + \cdots + \sqrt[m]{\theta_{m-1}})$$

On multiplie ensuite t_1 par ϵ^{m-1}, t_2 par $(\epsilon^2)^{m-1}$etc. et en ajoutant il vient :

$$x_2 = \frac{1}{m} (\sqrt[m]{\theta_0} + \epsilon^{m-1} \sqrt[m]{\theta_1} + (\epsilon^2)^{m-1} \sqrt[m]{\theta_2} + \cdots + \sqrt[m]{\theta_{m-1}})$$

On trouve de même les autres racines. Et le cas où m n'est pas premier. La forme de la résolvante est changée. Par cette méthode, explique Vuillemin qui suit toujours Lagrange au plus près, la résolution de l'équation du cinquième degré est ramenée à celle d'une équation du quatrième degré en θ et dont les coefficients P_i dépendent d'une équation du sixième.

L'aboutissement des travaux de Lagrange nous dit que la fonction résolvante permet de résoudre algébriquement les équations du troisième et quatrième degré... mais elle ne sert de rien pour les équations générales de degré supérieur au quatrième, « puisque la résolvante est alors racine d'une équation qui d'un degré supérieur à la proposée et n'est pas susceptible d'abaissement » (Vuillemin 1962, 94).

Si Vuillemin analyse ligne à ligne le Mémoire de Lagrange, dans ces passages, c'est pour y mettre en évidence la force conceptuelle à l'œuvre: à maintes reprises Lagrange change le point de vue qui le précède. Il travaille sur la réduite puis la résolvante, mais c'est pour montrer qu'il s'agit bien plus que de développer de nouveaux outils. « La réduite cesse alors de jouer d'éléments simplement accessoire dans le raisonnement, on l'analyse pour elle-même puisqu'elle permet de résoudre la proposée, il faut précisément chercher le secret de la solution dans l'équation qui exprime les solutions de la réduite en fonction des solutions de la proposée » (ibid. 78). Et dans cette méthode, notre philosophe analyse ce fait conceptuel très important, Lagrange régresse de conditions de manière à placer la recherche des solutions de la proposée comme une conséquence « à distance» des travaux sur les concepts de rang supérieur. En même temps ces concepts de rang supérieur ouvre le problème plus largement. Ce qui donne lieu à une synthèse «expansive» des solutions. C'est ainsi qu'il choisit de citer le point de vue de Lagrange comme critique au sens où la méthode générale a permis de mettre en évidence les résultats négatifs ou conditionnels. En ce sens les mathématiques accroissent leur conscience d'elles-mêmes en concevant ce qu'il est licite et à quelles conditions, d'accomplir. Et cette conscience s'est établie dans la construction de la résolvante qui nous donne les raisons (au moins partielles) de notre réussite de résolution au degré 2, 3, 4 et de la non résolubilité au degré 5. « Si la résolution des équations des degrés supérieurs au quatrième n'est pas impossible, elle doit dépendre de quelques fonctions des racines différentes des précédentes. » (ibid. 357)

« De plus, ajoute Lagrange cité par Vuillemin, elles ont permis de donner à cette occasion les vrais principes et, pour ainsi dire, la vraie métaphysique de la résolution des équations du troisième et quatrième degré » (Vuillemin 1962, 95). Je cite le texte en entier qui se trouve au §104 387–388 des Réflexions.

> « 1) Si l'on a deux fonctions quelconques t et y des racines $x_1, x_2, x_3, \cdots$, de l'équation
> $$x^{\mu} + mx^{\mu-1} + nx^{\mu-2} + \cdots = 0$$
> et que ces fonctions soient telles que, toutes les permutations entre les racines $x_1, x_2, x_3, \cdots$ qui feront varier les fonctions y, fassent varier en même temps la fonction t, on pourra généralement parlant, avoir la valeur de de y en t et en m, n, $p, \cdots$ par une expression rationnelle, de manière que connaissant une valeur de t on connaîtra immédiatement la valeur correspondante de y, nous disons généralement parlant, car s'il arrive que la valeur connue de t soit une racine double ou triple, etc. $\cdots$, de l'équation en t, alors la valeur correspondante de y dépendre d'une équation, carrée, ou cubique,etc. dont tous les coefficients seront des fonctions rationnelles de t, et de $m,n,p,\cdots$. 2) Si les fonctions t et y sont telles que la fonction t conserve la même valeur par des permutations qui font varier la fonction y, alors on ne pourra trouver la valeur de y en t et en $m,n,p,\cdots$, qu'au moyen d'une équation du second degré, si, à une même valeur de t répondent deux valeurs différentes de y, ou du troisième degré, si, à une même valeur de t répondent trois valeurs différentes de y, etc. Les coefficients de ces équations en y seront généralement parlant des fonctions rationnelles de t et $m,n,p,\cdots$, en sorte qu'étant donnée une valeur de t on aura y par la simple résolution d'une équation du second degré ou du troisième degré etc. mais s'il arrive que la valeur connue de t soit une racine double, ou triple, etc. de l'équation en t, alors les coefficients des équations dont il s'agit dépendent encore eux-mêmes d'une équation du second ou du troisème degré, etc.
>
> De là on peut déduire les conditions nécessaires pour pouvoir déterminer les valeurs mêmes des racines $x_1, x_2, x_3, \cdots$ au moyen de celles d'une fonction quelconque des racines car il n'y aura qu'à prendre la simple racine x à la place de la fonction y, et appliquer à ce cas les conclusions précédentes ».

Nous parvenons ainsi au théorème le plus important de Lagrange, du moins l'un des plus connus qui est analysé par exemple par Edwards (1984) dans son livre sur Galois déjà cité.

Comme on l'a souvent remarqué on commence par travailler sur des fonctions des racines et sur les relations entre deux fonctions des racines en considérant l'effet d'une permutation des racines sur l'une des fonctions sur l'autre. C'est le travail sur la deuxième fonction qui supporte les données sur la première. Et celles-ci sont obtenues au moyen de permutations des racines de l'équation. Sans analyser la démonstration du théorème faisons comme Vullemin examinons un exemple particulièrement simple, celui de l'équation du second degré. Soit donc $x^2 + bx + c = 0$.

1) Par les fonctions symétriques $-b = x_1 Ê + x_2$, $c = x_1 x_2$.

$x_1 - x_2 = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{b^2 - 4c = y}$. La substitution

$$\begin{pmatrix} x_1 \, x_2 \\ x_2 \, x_1 \end{pmatrix}$$

change y en $-y$. On considère $x_1 = \phi(x_1 x_2) = y + x_2$. La substitution

$$\begin{pmatrix} x_1 \, x_2 \\ x_2 \, x_1 \end{pmatrix}$$

change x_1 de $y + x_2 = (x_1 - x_2) + x_2$ en $-y + x_1$. On peut donc exprimer x_1 en fonction de $(x_1 - x_2)$ et les coefficients de l'équation $x_1 = \frac{1}{2}$ [- b+ $(x_1 - x_2)$].

2) $x_1 - x_2$ n'admet pas toutes les substitutions de $x_1 + x_2$. Par les deux substitutions qu'admet $x_1 + x_2$ elle prend les valeurs $x_1 - x_2$ et $x_2 - x_1$. Donc $x_1 - x_2$ est racine de l'équation $t^2 - (b^2 - 4^c) = 0$

$x_1 - x_2 = \sqrt{b^2 - 4c}$. Une démonstration de ce théorème, pour une partie, est exposée dans Edwards (1984, 34–35). Les conclusions que Lagrange tire, citées par notre philosophe « ont permis de donner à cette occasion les vrais principes et, pour ainsi dire, la vraie métaphysique de la résolution des équations du troisième et du quatrième degré » (Lagrange 1770–1771, 205–414).

La philosophie de la philosophie de l'algèbre

Si Vuillemin a posé le problème d'une application des méthodes formelles des mathématiques à la Philosophie de la Connaissance en particulier la méthode mathématique, quand l'Algèbre devient formelle, je poserai des problèmes de même nature en me concentrant sur l'analyse des Mémoires de Lagrange effectuée ci-dessus. La réponse que Vuillemin a apportée concernant la théorie des groupes par exemple a été négative. On ne peut l'appliquer à la résolution de problèmes philosophiques. « À la différence des opérations qui entrent dans la théorie des groupes les opérations réflexives sont en effet caractérisées par la propriété d' être non réversibles » (Vuillemin, 1962 : 100). Mais si [il s'agit de la théorie de la résolution algébrique des équations liée aux structures lointaines de la théorie des groupes, et de la méthode de Fichte] « rien n'empêche d'apercevoir, entre les domaines plus éloignés encore, et même entièrement indépendants, sinon des rapports exacts de structure, du moins des analogies dans les problèmes qu'elles posent» (ibid. 102). Donnons encore les trois propriétés de la résolvante. 1) Elle permet de résoudre algébriquement les équations du troisième, du quatrième degré et peut servir dans la résolution des équations binômes. 2) Mais elle ne sert à rien pour les équations générales de degré supérieur au quatrième, la résolvante est alors racine d'une équation d'un degré supérieur à la proposée qui n'est pas généralement susceptible d'être abaissée. 3) Elle fait la théorie de la méthode de résolution et de ses limites.

L'origine de la théorie des groupes : le Mémoire de Lagrange

Passons à la thèse principale de Vuillemin. Il va analyser les origines de la théorie des groupes chez Lagrange jusqu'à pouvoir spécifier le point de vue de ce dernier par différence avec celui de Galois. Le théorème de la théorie des groupes sur lequel insiste notre philosophe, je vais y revenir dans quelques lignes, est en corrélation avec son analyse du système de Fichte.

Enonçons le théorème de Lagrange. Soient R et R_1 deux fonctions rationnelles des racines x_i. Supposons que R demeure invariable pour toutes les permutations qui constituent le groupe appartenant à R_1 -que R appartienne ou non au même groupe que R_1. Soient d'autre part les fonctions symétriques fondamentales:

$$\sigma_1 = \Sigma x_i \qquad \sigma_2 = \Sigma x_1 x_2, \cdots, \sigma_n = x_1 x_2 \cdots x_n.$$

Le théorème de Lagrange affirme que R peut s'exprimer comme fonction rationnelle de R_1 et $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$. "Prenons l'exemple de l'équation du troisième degré. La transformation

$$x = y - \frac{n}{3y}$$

qui exprime x comme fonction rationnelle de y et la résolvante

$$\mathrm{y} = \frac{x_1 + \epsilon x_2 + \epsilon^2 x_3}{3}$$

qui exprime y en fonction rationnelle de x et de ϵ ne sont possibles que parce que la proposée et la réduite $y^6 + py^3 - \frac{n^3}{27} = 0$ demeurent toutes deux invariantes pour l'ensemble des permutations des racines de la proposée. « Et, ajoute Vuillemin, la réduite se décompose en deux équations du troisième degré,

$$\mathrm{r} = y^3 \qquad r^3 + pr - \frac{n^3}{27}$$

$$\theta_1 = \xi_0 + \epsilon \xi_1 + \epsilon^2 \xi_2 \qquad \theta_2 = \xi_0 + \epsilon^2 \xi_1 + \epsilon \xi_2$$

parce que les fonctions r ou θ prennent deux valeurs différentes pour l'ensemble des substitutions qui laissent invariantes les réduites en y ou en t. » (Vuillemin, 1962 : 97)

Vuillemin indique que nous avons là « l'idée galoisienne de "suite de compositions" »: « étant donné une proposée de degré trois, il faut construire une suite de fonctions des trois racines, la première d'entre elles—la réduite—admet 1. 2. 3 = 6 substitutions. La seconde, la réduite abaissée—n'en admet plus que deux, qui correspondent à la classe paire et à la classe impaire. La troisième—la résolvante—n'en admet plus aucune. Tel est le secret de la résolution. » Et il montre que ce théorème peut se généraliser Si on considère au lieu de R_1, un certain nombre de fonctions rationnelles $R_1,R_2,R3$, en supposant R invariante pour toutes les permutations qui laissent simultanément $R_1,R_2,R_3,\cdots$, *invariantes*, R sera alors une fonction rationnelle de R_1,R_2,R_3, et de $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$. C'est à travers l'invariance par les substitutions que l'on peut passer des diverses $R_i\cdots$, à R fonction rationnelle des R_i et des σ_i.

Considérons l'équation du nième degré $f(x)=0$ dont les racines sont $x_1,x_2,\cdots,x_n$. On détermine les valeurs des coefficients de la proposée ; les fonctions symétriques élémentaires ; des suites finies d'opérations rationnelles (multiplier et diviser, soustraire et additionner) suffiront pour déterminer toutes les fonctions symétriques rationnelles en général. Si on tombe sur des fonctions non symétriques des x_i $R_1,R_2\cdots R_n$, le théorème de Lagrange permet de calculer rationnellement toute fonction R qui demeure invariante pour toutes les permutations qui laissent simultanément invariantes $R_1,R_2,\cdots,R_n$

On est très près du groupe de Galois. Pourquoi ? Il suffit de définir ce qui est appelé la construction et la connaissance des fonctions rationnelles R, ce qui, ajoute Vuillemin, conduira à la théorie des corps algébriques, de spécifier le théorème général de Lagrange à chaque cas qui se présente. Notre philosophe cite ici un texte connu de Félix Klein (1884,)

> « Lorsqu'alors nous disons que d'une fonction qu'elle demeure invariante pour certaines permutations, nous signifions par là que sa valeur numérique ne change pas. Il existe alors toujours un groupe G de permutations de x_i, tel que toutes les fonctions rationnelles des x_i qui restent sans changement pour G et uniquement celles-ci sont connues rationnellement. De plus, toutes les permutations de G qui laissent sans changement une fonction rationnelle quelconque donnée des x_i forment en chaque cas un groupe tel qu'en relation aux permutations de G la classification des fonctions rationnelles qu'on vient de décrire ainsi que le théorème de Lagrange sont valables sans exception. Le groupe G est alors ce que Galois appelle le groupe de l'équation.»

De fait on peut suivre Vuillemin en ajoutant que la présence du groupe, non encore articulée est d'abord manifeste dans la philosophie de Lagrange, et précisément dans son attitude critique. Klein montre combien le point de vue de Lagrange est galoisien. Et la méthode de ce dernier quand on applique ses deux théorèmes, comme Vuillemin le remarque, revient à construire une suite de fonctions des racines $x_1,\cdots,x_n$ dont la première doit être une fonction symétrique, ϕ_0 — par exemple l'une des fonctions symétriques égales à un coefficient de l'équation— et dont la dernière est une racine, p. e. x_1,et

« $\phi_0(x_1,x_2,\cdots,x_n),\phi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\phi_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,\phi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ ϕ_0 admet $n!$

permutations, ϕ_1 un nombre moindre que je ne précise pas ici, de sorte qu'elle va prendre r valeurs, pour les $n!$ substitutions, ϕ_2 un nombre l qui est une partie des substitutions admises par ϕ_2, ϕ_1 sera racine d'une 'equation de degré r, dont les coefficients sont les expressions rationnelles de ϕ_0 et des coefficients de l'équation générale, ce qui permet d'assigner les coefficients de l'équation de degré r. De même ϕ_2 est racine d'une 'equation de degré l, dont les coefficients sont les expressions rationnelles des coefficients de ϕ_1 et de l'équation générale donnée. On obtient ainsi une cascade de k équations et si l'on peut choisir $\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_k$ en sorte que toutes ces résolvantes soient des équations binômes, on aura résolu algébriquement la proposée" (Vuillemin 1962, 99). Au degré trois ϕ_0 a six valeurs, ϕ_1 et ϕ_2 trois, racines de l'équation binôme de degré trois. Et ϕ_1 et ϕ_2 deux valeurs qui donnent une équation de degré 2, d'où la solution de la proposée ».

Deux remarques importantes doivent terminer ce paragraphe. La première consiste à noter que Lagrange dans la méthode *a priori* recherche de fait une généralité de rang supérieur, et ce en particulier dans la toute dernière exposition. Il pose la question d'une théorie générale de la théorie des équations (dont il découvre les limites de validité de façon précise) et comme il le dit la «métaphysique» des équations algébriques.

La seconde remarque porte sur la théorie des groupes. Il est vrai, comme le note Vuillemin, que des éléments de la théorie des groupes sont à l'œuvre dans les analyses de Lagrange. Mais en même temps la réflexion de Lagrange qui nous ramène comme je l'ai noté, à l'analyse des symétries du polynôme se situe sur un terrain parallèle.

C'est à cette place exactement, et dans son prolongement, que se situe mon entreprise philosophique. La recherche de symétries se fait à de multiples niveaux : celui de la théorie des groupes qui donne son sens à une certaine notion de symétries, j'y reviens encore plus bas. Mais aussi celui qui reste au niveau du théorème qui énonce une ontologie du polynôme (fonctions symétriques).

La structure du Mémoire de Lagrange, sa signification philosophique

En examinant le plan de l'»extraordinaire» Mémoire de 1771 Vuillemin décèle une contradiction dans la construction. Il éclaircit la question en expliquant que dans les trois premières sections du Mémoire Lagrange construit les solutions en supposant donnée la résolvante. Mais dans la quatrième section c'est la possibilité de la construction de la résolvante qu'il analyse. Et cette différence technique, cache selon Vuillemin une différence plus profonde portant sur la Métaphysique[5] de la méthode dont l'articulation peut se retrouver dans de tout autres domaines sans rapport d'objet avec l'articulation de l'Algèbre. C'est encore à cet endroit que surgit la philosophie en personne.

5 Vuillemin met une majuscule à Métaphysique pour désigner la philosophie.

Il existe trois moments dans l'exposé des principes de résolution de l'équation du troisième degré. On reprend : d'abord le moment historique et apagogique à partir de la solution donnée par les algébristes italiens. Elle procède a posteriori : connue la transformation naturelle t on construit la réduite, qu'on décompose dans les deux équations. L'emploi de l'équation binôme permet la résolution algébrique. La cinquième opération construit la résolvante qui a permis cette suite d'opérations. Ensuite Lagrange refait le même chemin en sens inverse. Partir de la résolvante construite à partir des racines de la proposée, $t = f(x)$ construite avec les racines de la proposée et des racines de l'unité, former l'équation binôme 2' et 3'en t invariante pour les substitutions des racines et troisème degré ainsi que l'équation en θ du second degré dont les racines sont des combinaisons linéaires portant sur les fonctions symétriques des racines de la proposée et des racines de l'unité. Cette opération rend inutile la formation de la réduite du sixième degré 4' et c'est donc elle qui correspond à l'opération inverse de celle par laquelle les algébristes italiens abaissaient la réduite du sixième au deuxième degré. Et on obtient les valeurs des racines de la proposée en fonction linéaire des racines de l'unité et des valeurs de la résolvante. 5'. (Les primes désignent ici leurs correspondants dans l'étape directe que nous avons commentée). Ce qui correspond à l'étape 1, la transformation naturelle de la méthode historique.

Mais il y a aussi le moment métaphysique mais en un second sens. On retrouve une suite d'opérations correspondant à la suite de celles qui composent le premier moment dans une tout autre perspective : Lagrange considère que le problème de la résolution revient à celui de la partition du groupe symétrique en deux classes de substitutions exclusives. Cette partition permet la considération du groupe alterné correspond à la quatrième opération du raisonnement précédent. « Le moment métaphysique se termine enfin par la construction de la résolvante, de laquelle partait le premier moment *a priori* et auquel aboutissait le moment apagogique. » (Vuillemin 1962, 102) On note que jusqu'ici à aucun moment ce dernier n'a quitté le sol mathématique. Vuillemin va alors tenter d'exposer entre des domaines assez différents et même totalement indépendants, sinon des rapports exacts de structure, du moins des analogies dans les problèmes qu'elles posent. Il ajoute en note qu'il s'agit pour lui de «suggérer» des affinités historiques qui tiennent au *Zeitgeist*. Partant de la question kantienne de la possibilité de l'expérience dont il souligne les difficultés il adopte la position de Fichte. C'est pour Fichte qui reprend la position kantienne la possibilité de la conscience de soi qui devra servir d'unique principe pour déduire la possibilité de l'expérience.

Je vais me contenter ici de reproduire comme le fait Vuillemin la méthode exposée dans la *Doctrine de la Science*. Je voudrais attirer l'attention du lecteur sur le fait que Vuillemin utilise ici le vocabulaire Lagrange mathématicien dans l'analyse et l'exposition de la philosophie de Fichte. Nous sommes en train d'analyser l'analyse par Vuillemin de Fichte dans un cadre lagrangien.

Elle procède en trois moments. Le premier moment est la première série de l'abstraction philosophique. Nous nous y plaçons d'un point de vue extérieur, il reproduit en les adaptant, les moments principaux du système de Fichte. «Le disciple le plus intelligent de Kant» selon Jean-Louis Bruch dans sa thèse sur la philosophie religieuse de Kant. Et ajoute Vuillemin, « comme la méthode de Lagrange *a posteriori*, reproduisait les moments principaux de ses prédécesseurs. »

Et mieux même on peut même regarder comme une sorte de «réduite» l'expression que Fichte donne au principe de l'idéalisme transcendantal : « comment expliquer que le Moi se pose lui-même comme déterminé par le Non Moi ? » Et Vuillemin voit la déduction de Fichte « le conduire à un élément qu'on tiendra pour l'analogue de la résolvante de Lagrange. » L'idéalisme transcendantal déduit la possibilité de l'expérience de la possibilité de la conscience de soi. La conscience fait l'expérience de l'activité par laquelle le Moi se pose comme déterminé par le Non Moi. Et notre philosophe use sans retenue des termes de la construction de Lagrange pour rendre compte du fait que la conscience s'approprie pour elle-même ce qu'elle osait d'abord en elle-même mais au regard d'un autre.

Ou encore «la résolvante» doit donc transformer en expérience vécue les éléments d'expérience qui, avant son intervention, s'opposaient comme de simples possibilités objectives. Dans le second moment, la conscience réelle expérimente, mais dans un ordre renversé, les différentes étapes que la réflexion dérivée avait posées à titre de simples possibilités de pensée. Fichte pose cette seconde série réflexion originaire ou série de la conscience vulgaire. « Au lieu d 'aboutir ici à la résolvante, comme fait de conscience, nous en partons. La thèse se substitue à l'hypothèse et le fait d'expérience à la donnée extérieure, comme, dans la seconde série de Lagrange, la pratique des mathématiques à leur histoire raisonnée ».

La seconde série donne lieu, à son tour, chez Fichte, à une nouvelle réflexion du philosophe, «le point de vue philosophique supérieur.» Toute la philosophie n'est plus alors que l'effort par lequel nous prenons conscience des activités cachées du Moi (Vuillemin 1962, 107). Il arrive que Fichte oppose cette deuxième série comme la Métaphysique à la Critique, la philosophie kantienne n'étant parvenue selon lui qu'à la Métaphysique. Mais ce niveau n'est pas suffisant. À ce niveau supérieur la philosophie abandonne toute prétention à légiférer pour l'esprit humain (ibid. 108). Si l'on poursuit cette analyse selon Vuillemin, il existe un rapport entre les deux séries philosophiques, mais de plus, il commande un rapport entre une deuxième et une troisième série. La question tourne autour de la chose en soi.[6] L'hypothèse dogmatique selon laquelle existeraient des choses en soi hors du Moi se trouve réfutée dans la *Doctrine de la Science*. Mais en réalité la conscience commune ne sait rien des choses en soi. Jamais elle ne prétend que le fondement de la projection du Non Moi par le Moi où la doctrine de la Science découvre l'opposition du Moi infini au Moi, implique l'existence contradictoire d'une chose en soi hors du Moi. Et la réflexion philosophique ne peut donc aider la conscience commune qu'en l'éclairant sur son mécanisme, non en altérant les lois de celui-ci (Vuillemin 1962, 109). Cette réflexion, devenue philosophique s'explique à elle-même et saisit activement, je suis toujours le commentaire de Vuillemin, ce que la représentation produisait passivement sous la forme de la contemplation.

La conscience de soi qu'on a posée au principe de l'idéalisme transcendantal doit impliquer que lorsque nous déduisons la représentation cette déduction nous fasse apercevoir comment elle naît tout entière de l'effort par lequel le Moi se pose en soi et pour soi et réalise ainsi le

6 La question de la chose en soi est au centre des interprétations de Kant par les post kantiens.

retour de la conscience en elle-même (ibid.). Mais la déduction manifeste l'échec de cet effort. Le conflit entre la conscience pure et la conscience réelle doit être tranché par une décision pratique. et c'est la réflexion philosophique supérieure qui prend conscience de cette situation. Mais elle retrouve là selon Fichte, ce qu'elle s'était assigné comme principe abstrait d'une conscience simplement possible. Nous pouvons faire débuter alors la troisième série qui vérifie le concept de la méthode philosophique. et l'on peut établir un parallélisme rigoureux entre les «principes « de la méthode (telle qu'on peut la penser par abstraction) et les phases de la réflexion philosophique supérieure.

Le premier principe méthodique, acte pur de l'intuition intellectuelle posant l'identité du sujet et de l'objet comme fondement de la conscience de soi suppose une abstraction complète des conditions de la représentation. Il n'est pas engagé dans les problèmes particuliers de la déduction pas plus ajoute Vuillemin, que ne l'est chez Lagrange le théorème ayant trait à la Théorie des Groupes. Pour Fichte il y a un lien très étroit entre l'intuition intellectuelle et la réflexion philosophique supérieure. La première est bien au principe de toute expérience sans être créatrice. L'abstraction philosophique résulte quant à elle du même arbitre qui est le secret de la possibilité de la conscience de soi. On passe donc d'une connaissance synthétique à une pure thèse, à la proposition analytique : Moi = Moi. Ce Moi pouvoir pur d'abstraire est aussi pouvoir pur de poser. Le Moi de la raison est une activité absolue qui ne peut se déterminer intérieurement par rapport à elle-même, il est amené à poser son opposé le Non-Moi comme principe de cette détermination. Au Moi est opposé le Non Moi. L'entendement joue dans l'expérience philosophique le rôle du second principe dans l'abstraction philosophique. Et le Moi déduit la représentation comme action réciproque du Moi divisible et du Non-Moi.

Je voudrais maintenant me livrer à un commentaire du point de vue de Vuillemin de la position philosophique de Fichte, dont on sait que Kant dans les *Nachlass* s'était fortement rapproché. Retour à l'intuition intellectuelle, qui devient un élément moteur de la réflexion philosophique supérieure, ces propositions parlent à Vuillemin à la recherche d'une philosophie théorique. Kant avait mis un interdit à toute position formelle, considérée comme formaliste au regard d'un contenu objectif qui puise ses sources dans le donné intuitif sensible. Fichte permet une reconquête de celui-ci au plus profond de la réflexion philosophique. Le Je qui accompagne toutes nos représentations redevient créateur.

À partir de là nous pouvons voir comment Vuillemin établit une analogie profonde de structures entre la méthode de Lagrange et celle de Fichte. Je vais en retracer les traits principaux. Nous pouvons avoir conscience de ce qu'il peut y avoir d'emblée d'artificiel dans ce rapprochement, mais c'est la construction philosophique propre de Vuillemin qui l'établit, comme une véritable production philosophique.

Il est question de trois séries. Ce qui est analogue c'est le rapport entre les deux premières séries d'une part et la troisième.

La résolvante chez Lagrange, dans les deux premières séries appartient entièrement à la théorie des équations. La troisième série porte en réalité sur les groupes de substitution dont la théorie peut être faite sans qu'intervienne la notion d'équation.

La théorie de la résolvante fichtéenne a pour objet la possibilité et l'expérience du savoir, l'imagination et la représentation et toutes deux dépendent de déterminations empiriques. Au contraire, l'intuition intellectuelle et les autres principes de la troisième série nous mettent en présence d'une activité pure entièrement indépendante des occasions de l'expérience.

La troisième série chez Lagrange se libère des points de départ contingents, elle est générale et abstraite. Elle a trait non aux êtres individuels, mais à leurs lois de correspondance. Chez Lagrange elle conduit à la théorie des groupes, chez Fichte à la possibilité de la conscience pure de soi. Cette dernière théorie peut être regardée comme le fondement transcendantal de la Logique. Ces indications rendent une place à l'étude des jugements analytiques qui comme on sait chez Kant sont éclipsés par les jugements synthétiques *a priori*. Chez Fichte l'intuition intellectuelle exige de la méthode qu'elle fournisse le principe absolu de ses déductions indépendamment du fait même de la représentation. On peut donc regarder selon Vuillemin l'intervention de ces troisièmes séries comme des illustrations de la méthode structurale.

On distingue traditionnellement deux facultés : celle de l'entendement qui réfléchit sur les problèmes et éventuellement les résout, comme pour les quatre premiers degrés mais rien ne garantit la nécessité du procédé. Quelque chose dans l'acte même de l'entendement échappe à la raison. Il faut donc faire appel à la raison comme deuxième faculté. En affirmant la thèse de l'intuition intellectuelle Fichte indique qu'il faut passer d'une méthode générique, limitée, naïve à une méthode critique, réfléchie. Il en va de même pour Lagrange quand il superpose les rudiments d'une Théorie des Groupes à la recherche indirecte ou directe des solutions des équations algébriques (Vuilemin 1962, 116).

Et cette recherche critique et systématique est constante dans les travaux de Lagrange. Dans la *Théorie des fonctions analytiques* de 1797 il se propose de dégager les principes du calcul différentiel des considérations d'infiniment petits ou d'évanouissants, de limites et de fluxions et de les réduire à l'analyse algébrique des quantités finies. Il y a chez Lagrange une tentative de développer le formalisme du calcul, dans la *Théorie des Fonctions analytiques* en faisant abstraction de tout emprunt à la Géométrie, à la Mécanique ou à la Métaphysique. Et Vuillemin d'ajouter que «en somme par fidélité à la méthode cartésienne, Lagrange refuse d'admettre une idée préconçue de limite» (ibid. 116).
Et on aperçoit le même mouvement dans la *Mécanique analytique* qui est suivant notre philosophe à la Mécanique du XVIIIè siècle ce que la *Géométrie* de Descartes était à la Géométrie grecque. Cependant qu'il s'agisse de la Théorie des équations, de la Théorie des fonctions ou de la Mécanique analytique, le formalisme que de Lagrange reste asservi aux êtres à partir desquels il s'est développé. Il reste pris dans ce que Vuillemin appelle *le cadre génétique*. Il n'a pas, p. e., promu une théorie des groupes autonome. Le vaste projet de Lagrange ne pourra s'accomplir que chez les successeurs (Galois, Cantor, Grassmann qui développeront de façon autonome les structures que la méthode génétique ne permettait de considérer qu'insérées

et comme engluées dans les applications particulières. Comme le dit Vuillemin, la théorie des équations étouffe la théorie des groupes, la Théorie des fonctions n'éclaircit pas les principes de la convergence des séries qu'elle suppose etc.) Et la même faiblesse est inscrite au cœur de la philosophie de Fichte.

Science et philosophie : réflexions rapides et cependant générales

Vuillemin a montré qu'il existait une analogie de structure entre les théories mathématiques de Lagrange et la philosophie de Fichte. Inutile de nous attarder sur le fait que cette analogie ne suppose rien de mathématique chez Fichte et rien de philosophique explicite chez Lagrange. Elle trouve donc son fondement en un lieu qui est au-delà des mathématiques de Lagrange et de la philosophie de Fichte. Elle se formule en termes de mouvement formel de structure conceptuelle. Cette analogie rend ainsi possible une vision des limites de ces deux positions dans un même système conceptuel. L'avantage d'une telle affirmation (et analyse) est bien de pouvoir situer dans le même *Zeitgeist* l'idéalisme transcendantal de Fichte et la théorie de la résolvante. L'analogie, j'y insiste, est construite comme telle et elle l'est conceptuellement. Nous n'avons nullement besoin de chercher si Fichte connaissait les mathématiques de Lagrange ou si Lagrange avait une quelconque connaissance philosophique. Il s'agit d'un parallélisme strict. Mais ce parallélisme n'est pas sans la substance qui unifie ces séries. Lagrange et Fichte découvrent de nouvelles structures. Pour Vuillemin, il leur manque à tous deux d'avoir pu développer pour eux-mêmes les objets qu'ils ont découverts Ils appartiennent encore à l'empirisme génétique. Cela signifie que pour Lagrange les éléments de la Théorie des groupes correspondent à l'inversion du problème de la résolution algébrique des équations. Pour Fichte la doctrine de l'intuition intellectuelle ne diffère pas du principe de l'idéalisme transcendantal inversé. « Au lieu de se demander comment les conditions de possibilité de l'objet de l'expérience se confondent avec les conditions de l'objet de l'expérience, lorsque la possibilité de la conscience de soi est supposée acquise, c'est cette supposition qu'on commence précisément à mettre en question » (ibid. 120).

La nouvelle ère théorique dans laquelle et Fichte et Lagrange ne sont pas entrés, (mais qu'ils ont rendu possibles) est celle de la structure, pour laquelle la considération des êtres et des objets doit laisser la place à celle des formes et des opérations. Dans le premier cas on peut encore procéder par construction et de manière naïvement intuitive, dans le second on fait abstraction de tout ce que suppose la première situation. Et notre philosophe d'affirmer que « seule l'idée de structure permet à la connaissance de parvenir au degré suprême de la connaissance et à l'état de lumière. C'est elle que visaient obscurément les philosophes classiques lorsqu'ils opposaient une connaissance vraie et droite, mais discursive et simplement symbolique, à une connaissance pleinement maîtresse de ses procédés ». (Vuillemin 1962, 192).

Vuiillemin adhère complètement dans son argumentation à la doctrine officielle de Bourbaki. Selon lui et Bourbaki, le degré ultime de la connaissance est celui de la structure. Structure topologique, structure d'ordre, structure différentielle, elles se caractérisent en ce qu'elles s'appliquent à des objets que l'on dit non spécifiés et pouvant ainsi s'étendre. On sait de façon très connue les difficultés rencontrées par une telle conception, figée, idéalisée, schématique selon Bourbaki lui-même dans l'article célèbre «L'Architecture des mathématiques» in Le Lionnais F. (1948) *Les grands courants de la pensée mathématique* Paris : Hermann. j'en retiens pour aller dans le sens de Vuillemin ce que j'appellerai la visée transcendantale. J'énonce brièvement à la fin de cet article l'idée qu'une réalisation plus précise s'en trouve dans la théorie des topos.

Histoire de la métaphysique, histoire des mathématiques

Il y a deux questions distinctes quoique liées dans l'argumentation de Vuillemin. D'abord celle de la périodisation, passage de l'état d'empirisme génétique à celui du structuralisme, ensuite celle qui provient de la philosophie de Vuillemin qui consiste englober dans le même système de description et d'analyse et donc renvoyant à l'opposition relevée plus haut, la théorie mathématique de Lagrange et la philosophie de Fichte.

Il suit de là que notre philosophe veut répondre à une question qui découle de sa problématique : la méthode philosophique est-elle en droit d'utiliser les notions de groupe et de structure ? Il est vrai que cette question succède dans l'économie de l'ouvrage à son analyse de la théorie de Galois où la notion de groupe est arrivée comme un concept majeur même s'il faut encore attendre un peu pour voir un concept parvenu à maturité.

Indépendamment du fait que l'étude des mathématiques de Lagrange peut nuancer sa relégation dans l'ère empirique et génétique (Martin 2013) et que de l'autre côté l'accent mis à juste titre sur le concept de groupe n'en dénote qu'une faible partie au regard des nouveaux développements qui ont affecté sa compréhension (classification des groupes finis, groupes de Lie, théorie des catégories etc.) je voudrais faire quelques remarques, si je le puis, à leur niveau la profondeur des propositions de Vuillemin. Il montre que si l'on considère la structure de groupoide, l'on ne peut considérer la conscience comme un groupoide (Vuillemin 1962 , 300).

Mais auparavant il a proposé un examen des facultés de connaissance et s'est demandé si on peut les regarder comme des opérations à proprement parler. Il distingue trois classes parmi les facultés de connaissance : la classe des impressions, la classe des représentifications, la classe des opérations de la connaissance. Cette dernière classe comprend les facultés de concevoir, de juger et de raisonner qui élaborent les matériaux fournis par les deux classes précédentes surtout la première (perceptions inconscientes et conscientes, sensations, éléments «rétentionnels et protentionnels (voir Husserl dont je ne traite pas ici) des impressions, non reconnues comme passées, intuition). Cette dernière classe définit l'objet de la connaissance pure. La théorie des opérateurs de connaissance, en rapport avec l'application des structures est fort délicate.

Il faut distinguer deux catégories d'opérateurs, les opérateurs objectifs et les opérateurs transcendantaux. Le type le plus simple des opérateurs objectifs est la négation, avec cette distinction entre logique classique et logique non classique Au moment où Vuillemin entreprend une analyse philosophique portant à la fois sur les mathématiques et la philosophie nous avions atteint la notion de structure mais la condition de cette structure, la substance qui porte les doctrines parallèles de la philosophie et des mathématiques s'exprime en termes d'opérateurs à la coloration logique, même si elle reste informée par des structures algébriques de groupe (Groupe de Curry).

Vuillemin tient à montrer à partir des analyses menées qu'il existe des formes de pensée communes aux mathématiques et à la philosophie. Il ne s'agit certes pas d'une *épistemè* à la Foucault, la normativité interne aux mathématiques ne le tolèrerait pas. Mais il existe par exemple une structure commune à la philosophie et aux mathématiques qui éclaire et est éclairée par la théorie de Lagrange, s'agissant de la philosophie ou du projet philosophique de Fichte. C'est pourquoi la connaissance et le développement des mathématiques sont si importants pour la philosophie et c'est aussi pourquoi la connaissance philosophique l'est non moins pour les mathématiques.

Bien entendu les transformations mathématiques qu'il s'agit de mettre en évidence s'accompagnent d'une manière structurale de transformations philosophiques souvent invisibles de la philosophie mais les philosophes se doivent de les mettre en avant, sur la grande scène de la pensée. Lui, Vuillemin a occupé cette scène, et à chaque fois qu'il a mené ses analyses mathématiques dans le langage que j'ai mis en évidence il a couplé cette analyse avec une structure philosophique qui lui est reliée. Sa tentative et son projet philosophiques sont encrés sur un sol philosophique. C'est pour des raisons philosophiques qu'il entre avec rigueur dans les calculs de Lagrange, persuadé que c'est là la manière de comprendre la base structurale qui supporte l'actualité des sciences et de la philosophie. Lui-même inséré dans la philosophie structuraliste, qui est celle de Guéroult ou de Granger, ou même celle de Bourbaki. il a cherché une *ontologie à horizon structurale*. Et les objets sur lesquels se réalise (même partiellement) cette structure, s'en trouvent eux-mêmes approfondis. C'est dans le même sens qu'il propose vers la fin de son ouvrage une ontologie formelle. Il esquisse à grands traits une histoire des rapports entre Métaphysique et formalisme, mais je prétends que c'est sur la base de la supposition première de la forme de pensée commune à la philosophie et aux mathématiques. Nous pouvons admirer le spectacle de ses étapes ; un monde de l'analogie qui se défait et qui fait de la fin de l'analogie la condition même de son existence, puis la fin de l'ontologie formelle (ibid. 511), mais c'est pour découvrir le nouveau lien entre Mathématique et philosophie dans les principes d'une méthode universelle. Au point de vue méthodique, la Métaphysique est donc, si on la compare à la Mathématique universelle, une sorte d'abstraction du second degré (ibid.). Et nous pouvons comprendre les difficultés que la Métaphysique de Descartes rencontre. Il s'agit du fameux cercle cartésien que je ne reproduis pas ici mais que je signale parce que Vuillemin voit le même chez Fichte, j'en ai repris le descriptif donné par notre philosophe. Philosophes et géomètres construisent leur objet, ici la figure, là la conscience et libèrent par un acte d'abstraction le produit de leur imagination de ce que celle-ci lui prêterait de contingent et de particulier (ibid. 513). On avait vu que Fichte affirmait l'universalité de la méthode mathématique et la légitimité de son application à la philosophie. «Méthode « équivaut donc chez Fichte à doctrine de construction» et cette construction limitée à l'espace en Géométrie est affranchie de cette limitation en philosophie. Cette «application» n'est pas une formalisation. Il s'agit d'un approfondissement conceptuel de la théorie mathématique. Je voudrais insister sur le fait qu'elle peut être très diversifiée, mais qu'elle est toujours présente.

C'est de là que viennent ce cercle et donc les difficultés : si nous usons du principe de raison, j'ai aussi besoin des lois de la réflexion, mais alors je suppose à tort et trop vite l'homogénéité des objets sur lesquels ils portent, alors que l'existence géométrique et l'existence philosophique ne sont pas homogènes. Les difficultés d'une telle position viennent de là : comment éviter de retrouver à la fin quel que soit l'intérêt du voyage, ce qu'on a supposé sans le savoir au début.

Fichte a proposé une solution dans une interprétation du projet critique. Nous pouvons généraliser un peu de façon à contourner les difficultés soulignées ci-dessus. Et la Métaphysique se définirait alors par l'ontologie formelle comme l'examen systématique des analogies tenues pour les catégories de l'existence (ibid. 515). Cependant je voudrais terminer comme Vuillemin en a fait la proposition. Il a formulé le projet d'une ontologie formelle. Celle-ci n'a pas nécessairement à être abandonnée dans la mesure où nous continuons de la penser en lien avec la Mathématique Universelle : il s'agit de ce projet d'une Critique Générale de la raison pure. Ce projet est pour le moment resté hors d'atteinte.

On remarquera que comme son maître Martial Gueroult Vuillemin ne cherche pas une sorte de transfert effectué mais non explicité des mathématiques de Lagrange à la philosophie (kantienne ou fichtéenne), si corrélation il y a, elle ne peut être que non causale. C'est l'analyse propre de la philosophie de Fichte, dans son intrinsécéité qui détecte l'analogie avec le Mémoire de Lagrange.

Si la constitution d'analogies structurales entre Mathématiques et Philosophie, voire entre Physique mathématique et philosophie, peut être facilement détectée, il doit être pertinent de rechercher ces analogies en prenant comme vecteurs directeurs les plus puissantes des récentes théories mathématiques. Celles-ci ont certainement intégré à leur développement des moments métaphysiques (ainsi en est-il des travaux de Butterfield et Isham qui ont construit un concept de «Daseinísation» pour rendre compte des formes de la physique quantique.). Il n'est pas certain que les nouvelles unités synthétiques qu'elles ont ainsi construites relèvent des mêmes formes transcendantales que celles que nous a léguées le kantisme. On doit comprendre que le parcours de Vuillemin ait emprunté après la Philosophie de l'Algèbre en une sorte d'expérience nouvelle un parcours dans l'empirisme que nous ont transmis les philosophies empiristes contemporaines.

Vuillemin a achevé son parcours des philosophies du post kantisme, dans son essai intitulé *La Révolution copernicienne*, où il va du néo kantisme (voir son chapitre sur Herrman Cohen) à la métaphysique de la finitude (Heidegger). Mais le seuil commun qu'il construit entre Lagrange et Fichte, qui n'a d'autres justifications que l'organisation conceptuelle de l'œuvre des deux auteurs, se proposait aussi pour but d'en sortir. Ce qu'il a tenté en rejoignant une nouvelle exploration : celle de *Logique et le monde sensible*. Mais sa sortie du kantisme ou même de l'idéalisme allemand n'a jamais vraiment été accomplie. La démarche de Joëlle Proust dans ses premiers travaux sur Carnap en était assez proche.

Il me semble néanmoins que la force de l'orientation de Vuillemin lui vient également de son séjour approfondi au sein de la pratique mathématique. Et si la philosophie contemporaine s'est longtemps diffractée entre l'empirique et le transcendantal (Foucault, disait Canguilhem, dans une boutade «est le Hume qui n'a pas trouvé son Kant»), le rapport aux mathématiques a changé la donne. Et ce dans la manière dont Jules Vuillemin explicite celui-ci. Non pas que les problèmes philosophiques trouvent leur solution dans les mathématiques, mais la production philosophique interne aux mathématiques ouvre des formes de pensée le plus souvent nouvelles—insuffisamment exploitées.

Je ne prendrai pour finir que l'exemple de la théorie des topos, qui donne un sens au développement de la théorie des catégories. Un topos est un lieu structuré qui rend possible la pratique des mathématiques, une sorte de champ transcendantal à partir duquel toute structure mathématique *a priori* peut se réaliser. En relation avec un ensemble de notions très riches et d'une grande puissance qui en permet la pratique proprement mathématique, je dirais volontiers qu'elle correspond à, que l'on peut lui faire correspondre l'entreprise de Jules Vuillemin. Il s'agit de mettre au jour des formes (pures) de pensée, signifiantes pour l'activité mathématique, mais aussi pour la pensée philosophique elle-même. Un concept comme le topos de Fichte peut jouer un rôle clef dans ce dispositif. Il reste à s'assurer que le remplacement de l'intuition intellectuelle produit les effets de connaissance escomptés. Je ne peux développer ici le cas des topos de Grothendieck, dont une organisation similaire joue un rôle semblable. Je dirais, je ne le construis pas ici, que la résolvante, peut être mise en position de classifiant des sous-objets que sont les équations polynomiales. La résolvante peut ou doit pouvoir véhiculer la forme de connaissance universelle qui chez Fichte est l'intuition intellectuelle.[7]

7 La mailleure introduction à la théorie des topos est MacLane and Moerdijk (1992).

References

- Boutroux, P. (1914), *Les principes de l'analyse mathématique, Exposé historique et critique,* 2 vol. Hermann: Paris.
- Bruch, J. L. (1968), *La philosophie religieuse de Kant*. Paris: Aubier Montaigne.
- Cartan, H. (1977), *Cours de Calcul différentiel*. Nouvelle édition refondue et corrigée Paris: Hermann.
- Comte, A. (1869), *Cours de philosophie positive.* 3è éd. augmentée d'une préface par E. Littré, 6 vol. Paris : Baillièr.
- Douady, A. and Douady R. (1999), *Algèbre et théories galoisiennes.* Paris : Cassini.
- Escofier, J. P. (1997),*Théorie de Galois*. Paris: Masson.
- Fichte, J.G. (1794), *Grundlage der gesamten Wissenschaftslehre*. 2 Auf 1802, Tome 1: 82 –328.
- Fichte, J.G. (1797), *Erste Einleitung in die Wissenschaftslehre*. Tome 1: 417–449.
- Gueroult M. (1930), *L'évolution de la structure de la Doctrine de la Science chez Fichte,* T. I-II, Paris : Les Belles Lettres.
- Harold E. E. (1984), *Galois theory*. New York, Berlin and Heidelberg: Springer Verlag.
- Hegel, W. (1969), *Science de la Logique*. Trad. Yankélévitch S., Tome IV 509. Paris : Aubier.
- *J. G. Fichte -Gesamtausgabe der Bayrischen Akademie der Wissenschaften* , I*ee* Reihe Werke, Bd I, II*ee*Reihe, Nachlassband.
- Kant, E. (1976), *Critique de la Raison Pure* (2de éd. 1787). Traduction de Jules Barni revue par P. Archambault Paris : Flammarion.
- Klein F. (1884), *The Icosahedron and the solutions of equations of the fifth degree*. Translated by Morrice, New York: Dover, 1916.
- Lagrange J.-L. (1797), *Théorie des fonctions analytiques*. Paris : L'Imprimerie de la Républiques.
- Lagrange J.-L. (1797), *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés* avec des notes sur plusieurs points de la théorie des équations algébriques (quatrième éd. réimprimée d'après la deuxième édition de 1808) tome VIII, 5è section; surtout note XIII sur la résolution des équations algébriques.
- Lagrange J.-L. (1867–1912), *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*. Mémoires de l'Académie de Berlin 1770–1771, tome III, 205–424.
- Lebrun, G. (1970), *Kant et la fin de la métaphysique*. Paris : Armand Colin.
- Lebrun, G. (1972), *La patience du concept Essai sur le discours hegelien*. Paris : Gallimard.
- MacLane, S. and Moerdijk, I. (1992), *Sheaves in Geometry and Logic: A first introduction to topos theory*. Springer: Hermann.
- Martin, Paulo A. (2014), "From the Fundamental Theorem of Symmetric Polynomial to Galois theorem" in On the Step of Galois- Proceeding of the Evariste Galois bicentenary meeting Invited editors Fabio Maia Bertato, Jose Carlos Fuentès, Jean-Jacques Szczeciniarz, Cle Campinas, Paris: Springer Hermann.
- Maronne, S. (2020), *Philosophia scientiae*. Paris : Kimé.
- Panza, M. (2022), *Modes de l'analyse et formes de la géométrie*. Paris :Vrin.
- Stendhal, H.B. (1932), *Vie de Henry Brulard* . Paris : la Pléiade Gallimard
- Vuillemin, J. (1962) *Philosophie de l'Algèbre* PUF : Paris.